Bissectrice in een rechthoek

15 maximumscore 5

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dan volgt dat de coördinaten van D $(6,1)$ zijn 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{52}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ en

  $\cos(\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (dus $\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF})=\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$

  waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

of

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- Dus de lijn door E en P en de lijn door E en D zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn EF, dus de lijn door E en F is de bissectrice van hoek PED 1

of

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- $\angle PEF=\angle EPC$ (Z-hoeken) dus $\tan(\angle PEF)=\tan(\angle EPC)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED)=\dfrac{D'D}{D'E}=\frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED=\angle PEF$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

of

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek AOC met driehoek FOP volgt dat driehoek CPD gelijkbenig is, dus $DC=DP$ 1
- Hieruit volgt $y_D=\dfrac{-2+4}{2}=1$ 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- In driehoek $P'EP$ (met P' de loodrechte projectie van P op het verlengde van EF) geldt: $\tan(\angle P'EP)=\dfrac{P'P}{P'E}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED)=\dfrac{D'D}{D'E}=\frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED=\angle P'EP$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

16 maximumscore 6

- Een vergelijking van c is $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ en een vergelijking van AC is $y=-\frac{1}{2}x+4$ — 1
- c snijden met AC geeft $(x-4)^2+\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2=4$ dus $1\frac{1}{4}x^2-10x+16=0$ — 1
- Dit geeft $D\left(4+\frac{4}{5}\sqrt{5},\, 2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ — 1
- Driehoek FDD'' (met D'' de loodrechte projectie van D op OA) is gelijkvormig met driehoek FPO dus $\frac{PO}{FO}=\frac{DD''}{FD''}$ — 1
- Dit geeft $\frac{-p}{4}=\frac{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$ ofwel $\frac{-p}{4}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}$ — 1
- Dus $p=2-2\sqrt{5}$ — 1

of

- Een vergelijking van PF is $y=-\frac{1}{4}px+p$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- Punt D is het snijpunt van AC met PF, dus moet gelden $-\frac{1}{4}px+p=-\frac{1}{2}x+4$ — 1
- Dit geeft $D\left(\frac{4p-16}{p-2}, \frac{2p}{p-2}\right)$ — 1
- $MD=2$ dus $\left(\frac{4p-16}{p-2}-4\right)^2+\left(2-\frac{2p}{p-2}\right)^2=2^2$ — 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\frac{64}{(p-2)^2}+\frac{16}{(p-2)^2}=4$ — 1
- $p=2-\sqrt{20}$ ($p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) — 1

of

- $rc_{ED}=-rc_{EP}=-\frac{4-p}{4}=\frac{p-4}{4}$ — 1
- $rc_{PF}=\frac{-p}{4}$ — 1
- Punt M is het midden van EF, dus EF is de middellijn van de cirkel — 1
- D ligt op de cirkel, dus geldt $\angle FDE=90°$ — 1
- Er moet dus gelden dat $rc_{ED}\cdot rc_{PF}=\frac{p-4}{4}\cdot\frac{-p}{4}=-1$ — 1
- Dan volgt $p=2-\sqrt{20}$ ($p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) — 1

of

- Driehoek AOC is gelijkvormig met driehoek $DD'M$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF), dus $\frac{AO}{AC}=\frac{DD'}{DM}$ en $\frac{CO}{CA}=\frac{MD'}{MD}$ 1
- $DM=2$ en $AC=\sqrt{80}$ geeft $D'M=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ en $D'D=\frac{4}{5}\sqrt{5}$ 1
- $D\left(4+\frac{4}{5}\sqrt{5}, 2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door F en D is $\dfrac{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ 1
- Een vergelijking van de lijn door F en D is $y=(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2})(x-4)$ 1
- Het snijpunt met de y-as is $P\left(0, 2-2\sqrt{5}\right)$ en dus is $p=2-2\sqrt{5}$ 1

of

- Een vectorvoorstelling van AC is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ en een vectorvoorstelling van PF is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-4\\p\end{pmatrix}$ 1
- Voor het snijpunt D geldt: $\begin{cases}8-2t=4-4v\\ t=p\cdot v\end{cases}$ 1
- Hieruit volgt dat voor de coördinaten van D geldt $\left(4+\dfrac{16}{4-2p}, \dfrac{-4p}{4-2p}\right)$ ofwel $\left(\dfrac{16-4p}{2-p}, \dfrac{-2p}{2-p}\right)$ 1
- $MD=2$ dus $\left(\dfrac{16-4p}{2-p}-4\right)^2+\left(2-\dfrac{-2p}{2-p}\right)^2=2^2$ 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\dfrac{64}{(2-p)^2}+\dfrac{16}{(2-p)^2}=4$ 1
- $p=2-\sqrt{20}$ ($p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1